Università

Eserciziari

Rita Vincenti

ESERCIZIARIO DI GEOMETRIA E... QUESTIONI AFFINI

Morlacchi Editore U.P.

Cover: *The Schubert cone in PG(4,q), xy+zt=0*, image courtesy M.V. Barbarossa, A.O. Duliu, adapted for the Bachelor thesis of M.V. Barbarossa "*Codes from projective subsystems of the Klein quadric of PG(5,q)*", Università degli Studi di Perugia (2006).

ISBN 978-88-9392-041-4

www.morlacchilibri.com – redazione@morlacchilibri.com
Stampato da Digital Print srl – Segrate (Milano) nel mese di novembre 2018.

Indice

Presentazione

In questo libro sono raccolti esercizi e problemi assegnati lungo gli anni in occasione delle prove scritte di esoneri e appelli del corso di Geometria 1. Sono parte integrante del testo *Lezioni di Geometria affine ed Euclidea del piano e dello spazio 3-dimensionale reale* (cf. [5]).
Alcuni esercizi riguardano problematiche relative all'algebra lineare e, in modo limitato, anche alla geometria Euclidea del piano e dello spazio.
Sono esposti in ordine cronologico, nella forma in cui sono stati assegnati.
Nella Sezione I ci sono gli esercizi svolti, trascritti nella modalità in cui sono stati eseguiti e rappresentati in aula.

Rita Vincenti

SEZIONE I – Esercizi con soluzioni

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E MATEMATICA PER APPLICAZIONI AA 2005/2006
Geometria 1
Soluzione della esercitazione del 14.12.2005

1) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ sia assegnata la applicazione lineare $f_\alpha : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita nel modo seguente:

$$f_\alpha(a_0, a_1, a_2, a_3) = ((\alpha-1)a_0 - a_1, a_2 - (\alpha-1)a_3, a_1 + (\alpha-1)a_2, -a_0 + (\alpha-1)a_1).$$

1a) Esprimere la matrice di f_α rispetto alla base canonica.

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Determino quindi le immagini degli e_i.

$$f_\alpha(e_1) = f_\alpha(1,0,0,0) = (\alpha-1, 0, 0, -1),$$

$$f_\alpha(e_2) = f_\alpha(0,1,0,0) = (-1, 0, 1, \alpha-1),$$
$$f_\alpha(e_3) = f_\alpha(0,0,1,0) = (0, 1, \alpha-1, 0),$$
$$f_\alpha(e_1) = f_\alpha(1,0,0,0) = (0, 1-\alpha, 0, 0).$$

La matrice di f_α rispetto alla base canonica è quindi:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 0 \\ -1 & \alpha-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1b) Verificare se esistono valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che f_α è un isomorfismo.

Poichè f_α è lineare, è sufficiente verificare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$, f_α è iniettiva e suriettiva. Provare la iniettività di una applicazione lineare tra due spazi vettoriali sullo stesso campo equivale alla condizione:

$$ker f_\alpha = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^4 | f_\alpha(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0_{\mathbf{R}^4}\} = \{0_{\mathbf{R}^4}\}.$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema $M_\alpha \cdot v = 0_{\mathbf{R}^4}$ con $v = (a_0, a_1, a_2, a_3)$. Controllo per quali valori di α il sistema ha rango massimo:

$$det M_\alpha = (\alpha-1)^4 - (\alpha-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)^2((\alpha-1)^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \neq 0, 1, 2.$$

Il sistema è quindi un sistema di Cramer per ogni valore di $\alpha \in R \setminus \{0, 1, 2\}$. Applicando Cramer si osserva che la soluzione è $(0, 0, 0, 0)$. La f_α è quindi iniettiva per ogni valore di $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Poichè $dim\ ker f_\alpha = 0$ per $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, dalla relazione

$$dim\ ker f_\alpha + dim\ im f_\alpha = dim \mathbf{R}^4,$$

si ottiene che $dim\ im f_\alpha = dim \mathbf{R}^4$ ovvero la suriettività di f_α per $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. La applicazione f_α è quindi un isomorfismo per $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.
$1c$) Determinare per $\alpha = 0$ i sottospazi $kerf_0$ e imf_0.

In questo caso abbiamo

$$M_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$kerf_0 = \{v = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^4 | M_0 \cdot v = 0_{\mathbf{R}^4}\}.$$

La prima e l'ultima riga di M_0 sono linearmente dipendenti, mentre il minore formato dagli elementi delle prime 3 righe e prime 3 colonne é diverso da zero, quindi $rg(M_0) = 3$ e $dim\ ker f_0 = 1$. Si ottiene $kerf_0 =< (1, -1, -1, 1) >$

$$imf_0 = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^4 | \exists v \in \mathbf{R}^4 : M_0 \cdot v = (a_0, a_1, a_2, a_3)^t\} =$$

$$\{(a_0 - a_1, a_1 + a_2, a_2 - a_0, a_0 - a_1) | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\} =$$

$$< (-1, 0, 0, -1), (-1, 0, 1 - 1), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 0) > .$$

Poiché $(0, 1, -1, 0) = (-1, 0, 0, -1) - (-1, 0, 1, -1) + (0, 1, 0, 0)$, allora

$$imf_0 =< (1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, 0) > .$$

$1d$) E' vero che $kerf_0 + imf_0 = \mathbf{R}^4$?

No, in quanto il vettore generatore di $kerf_0$ è linearmente dipendente dai vettori generatori di imf_0:

$$(1, -1, -1, 1) = (1, 0, -1, 1) - (0, 1, 0, 0).$$

Quindi $kerf_0 + imf_0 = imf_0 \subsetneqq \mathbf{R}^4$.

$1e$) Determinare un sottospazio $U < \mathbf{R}^4$ tale che $U \oplus imf_0 = \mathbf{R}^4$.

Siccome $dim\ imf_0 = 3$, cerco un sottospazio U di dimensione 1. Per assicurare che la somma sia diretta deve essere $imf_0 \cap U = \{0_{\mathbf{R}^4}\}$. Scelgo quindi il vettore generatore di U linearmente